



**Download**

[Solucionario Variable Compleja Serie Schaum Murray Spiegel](#)

14) Demuestre que:

Si  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$  y  $\|z_1\| = \|z_2\| = \|z_3\| = 1$ , los puntos  $z_1, z_2$  y  $z_3$  son vértices de un triángulo equilátero en la circunferencia unidad.

**Solución:**

Si  $z_1, z_2, z_3$  son vértices de un triángulo equilátero, entonces cada uno debe estar girando un ángulo de  $\pi/3$  radianes respecto a otro.

Sabemos que multiplicar por un complejo,  $u$ , de módulo 1 es un giro de amplitud igual a  $\arg(u)$ . Definamos  $u = \cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3)$ . Los tres vértices los podemos escribir como:

$$z_1 = z_1$$

$$z_2 = z_1 u$$

$$z_3 = z_1 u^2$$

$$\rightarrow z_1 + z_2 + z_3 = z_1 (1 + u + u^2) = z_1 \frac{u^3 - 1}{u - 1} = 0$$

Supongamos ahora que  $\|z_1\| = \|z_2\| = \|z_3\| = 1$ , y que  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ . Para probar que dichos números son vértices de un triángulo equilátero, lo que vamos a hacer es comprobar que son las raíces cúbicas de un número complejo. Es decir, se trata de probar que hay un número  $\alpha$  tal que  $z_1, z_2, z_3$  son las raíces de la ecuación polinómica  $z^3 - \alpha = 0$ .

Para esto es necesario y suficiente que el producto  $(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$  puede escribirse en la forma  $z^3 - \alpha$ . tenemos

$$\begin{aligned} (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) &= z^3 - (z_1 + z_2 + z_3)z^2 + (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3)z - z_1 z_2 z_3 \\ &= z^3 - (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3)z - z_1 z_2 z_3 \end{aligned}$$

Poniendo  $\alpha = z_1 z_2 z_3$ , lo que hay que probar es que  $z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = 0$ . todavía no hemos usado la hipótesis de que  $\|z_1\| = \|z_2\| = \|z_3\| = 1$ . Vamos a usarla ahora para intentar sacar factor común en la suma  $z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = 0$  la expresión  $z_1 + z_2 + z_3$ . tenemos que:

$$\begin{aligned} (1) z_1 z_2 + (1) z_1 z_3 + (1) z_2 z_3 &= \bar{z}_3 z_3 z_1 z_2 + \bar{z}_2 z_2 z_1 z_3 + \bar{z}_1 z_1 z_2 z_3 \\ &= (\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3) z_1 z_2 z_3 = 0 \end{aligned}$$

∴  $z_1, z_2, z_3$  son vértices de un triángulo equilátero.



**Download**

---

1dff872cbc